# 层次分析法（AHP）的原理与算法简介

目录

[层次分析法（AHP）的原理与算法简介 1](#_Toc417914996)

[1、层次分析法（AHP）简介 1](#_Toc417914997)

[1.1 层次分析法简介 1](#_Toc417914998)

[1.2 层次分析法的特点 1](#_Toc417914999)

[2、层次分析法的步骤与计算方法 1](#_Toc417915000)

[2.1建立层次结构模型 1](#_Toc417915001)

[2.2构造判断(成对比较)矩阵 2](#_Toc417915002)

[2.3计算单一指标下元素的相对权重 3](#_Toc417915003)

[2.4计算各层元素的组合权重 5](#_Toc417915004)

层次分析法在评分类模型中会经常用到，例如在客户价值评估、客户忠诚度评估等建模过程中涉及到指标的权重打分时，我们较多的会用到层次分析法，这里对层次分析法做个简要介绍。

## 1、层次分析法（AHP）简介

## 1.1 层次分析法简介

层次分析法(Analytic Hierarchy Process,简称AHP)是美国运筹学家、匹兹堡大学T. L. Saaty教授在20世纪70年代初期提出的， AHP是对定性问题进行定量分析的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。

“AHP”法运用了人的分析、判断综合能力，解决那些结构较为复杂、决策准则较多，且不易量化的决策问题，其将定性和定量分析相结合，把复杂问题逐层分解为各个组成因素，形成层次结构模型，将难于直接做出决策的问题转化为人或专家对各层因素的两两对比判断问题，将人的思维用数字的形式表示出来，具有高度的有效性、可靠性、可行性、简明性和广泛的适应性。

## 1.2 层次分析法的特点

简要说来，层次分析法有三个显著的特点：

1、系统性：将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策——系统分析（与机理分析、测试分析并列）；

2、实用性：定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题；

3、简洁性：计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。

# 2、层次分析法的步骤与计算方法

运用层次分析法建模时，大体可以分为以下四个步骤，以下分别介绍如下：

## 2.1建立层次结构模型

将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图：

最高层：决策的目的、要解决的问题

最低层：决策时的备选方案

中间层：考虑的因素、决策的准则

对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。

## 2.2构造判断(成对比较)矩阵

在确定各层次各因素之间的权重时，如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受，因而Santy等人提出：一致矩阵法，即：

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较。

2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

判断矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。判断矩阵的元素aij用Santy的1—9标度方法给出。心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个，即每层不要超过9个因素。

在建立递阶层次结构以后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了。假定上一层次的元素Ch作为指标，对下一层次的元素*A*1，*A*2…，*A*n有支配关系，目的是在指标Ch之下按它们相对重要性赋予*A*1，*A*2，…，*A*n相应的权重。对于大多数社会经济问题，特别是那些由人的判断起重要作用的问题中，直接得到这些元素权重并不容易，往往需要通过适当的方法来导出它们的权重，AHP所用的是两两比较的方法。

在这一步中，决策要反复回答问题，针对指标Ch两个元素*A*i和*A*j哪一个更重要些，重要多少。需要对重要多少赋予一定数值。这里使用1~9的比例标度，它们的意义见表1：

表1：标度的含义

|  |
| --- |
| 1.表示两个元素相比，具有同样重要性。  3.表示两个元素相比，一个元素比另一个元素稍微重要。  5.表示两个元素相比，一个元素比另一个元素明显重要。  7.表示两个元素相比，一个元素比另一个元素强烈重要。  9.表示两个元素相比，一个元素比另一个元素极端重要。 |
| 2、4、6、8为上述相邻判断中的中值。 |

若因素*i*与*j*比较得*aij*，则因素*j*与*i*比较的判断为1/*aij*。例如，指标是社会经济效益，分指标可分经济、社会和环境效益。如果认为经济效益比社会效益明显重要，它们的比例标度取5。而社会效益对于经济效益的比例标度则取1/5。对于*n*个元素来说，我们得到两两比较判断矩阵A：

 （1）

判断矩阵具有如下性质：

（1） （2） （3） （2）

称*A*为正的互反矩阵。由于性质（2）、（3），事实上，对于n阶判断矩阵仅需对其上（下）三角元素共个给出判断。*A*的元素不一定具有传递性，即未必成立等式

 （3）

但式（3）成立时，则称A为一致性矩阵。在说明由判断矩阵导出元素排序权值时，一致性矩阵有重要意义。

## 2.3计算单一指标下元素的相对权重

这一步解决在指标Ch下，n个元素A1，…An排序权重的计算问题，并进行一致性检验，对于A1，…An通过两两比较得到判断A，解特征根问题，

AW=λmaxW （4）

所得到的W经正规化后作为元素A1，…An在指标Ch下排序权生，这种方法称排序权向量计算的特征根方法。λmax和W的计算一般采用幂法，其步骤为：

（1）设初值向量W0，例如

（2）对于k=1，2，3，…计算

 （5）

式中经规一化所得到的向量。

（3）对于事先给定的计算精义，若

 （6）

则计算停止，否则继续步骤（2），式中Whi表示Wh的第i个分量。

（4）计算  （7）

在精度要求不高的情况下，可以用简单的近似方法计算和*W*，这里介绍两种方法。

（1）和法：第一步，*A*的元素按列规一化；

第二步，将*A*的元素按行相加；

第三步，所得到的行向量规一化得排序权向量*W*；

第四步，按下列公式计算。

 （8）

式中（*AW*）i表示*AW*的第i个元素。

（2）根法：第一步，*A*的元素按行相乘；

第二步，所得到的辫积分别开n次方；

第三步，将方根向量归一化即得排序权向量*W*；

第四步，按式（8）计算。

特征根方法是AHP中最早提出的排序权向量计算方法，也是被广泛使用的一种方法。近年来，不少学者提出了排序向量计算的其它一些方法，如最小二乘法，对数最小二乘法，等等，这些方法在不同场合下运用各有其优点。

在判断矩阵的构造中，并不要求判断具有完全的一致性。即不要求式（3）成立，这是被客观事物的复杂性与人的认识多样性所决定的。但要求判断有大体的一致性，出现甲比乙极端重要，乙比丙极端一重要，而丙比甲极端重要的情况一般是违反常识的。而且，当判断偏离一致性过大时，排序权向量计算的特征值方法将出现甘些问题。因此在得到后，需要进行一致性检验，其步骤如下：

（1）计算一致性指标*CI*

 （9）

（2）从平均随机一致性指标当中查找*RI*。平均随机一致性是多次（500次以上）重复进行随机判断矩阵特征值的计算这后取算术平均数得到的。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 矩阵阶数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| RI | 0 | 0 | 0.58 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 | 1.52 | 1.54 | 1.56 | 1.58 | 1.59 |

（3）计算一致性比例*CR*

 （10）

当CR＜0.1时，一般认为判断矩阵的一致性是可以接受的。

## 2.4计算各层元素的组合权重

为了得到递阶层次结构中每一个层次中的所有元素相对于总目标的相对权重，需要把第三步的计算结果进行适当的组膈，并进行总的判断一致性检验。这一步骤是由上而下逐层 进行的。最终计算结果得出最低层次元素，即方案优先顺序的相对权重和整个递阶层次模型的判断一致性检验。

假定已经计算出第层元素相对总目标的组合排序权重向量，第层在第层第j个元素作为准则下元素的排序权向量为，其中不受支配（即与层第j个元素无关的）元素权重为零。令，则第层的元素相对于总目标的组合排序权重向量由下式给出

 （11）

对于递阶层次组合判断的一致性检验，需要类似地逐层计算*CI*。若分别得到了第层次的计算结晶，和则第层的相应指标为

 （12）

 （13）

 （14）

和分别在层第*i*个指标下判断矩阵的一致性指标和平均随机一致必指标。当，认为递阶层次在层水平上整个判断有满意的一致性。